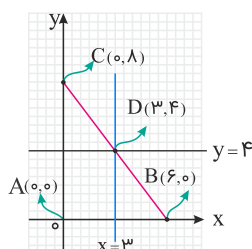




گزینه ۱

۱

راه حل اول: اگر مثلث رسم شده را روی محور مختصات فرض کنیم، داریم:

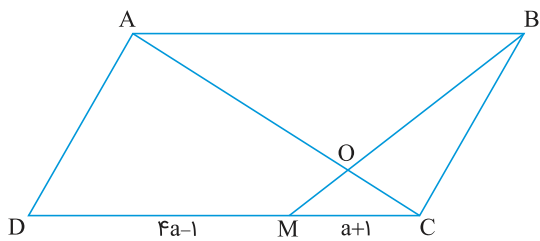


نقاطی که از دو رأس A و B به یک فاصله باشد، روی عمودمنصف AB قرار دارند. باتوجه به مثلث رسم شده معادله عمودمنصف خط AB ، $x = 3$ خواهد بود. همین طور نقاطی که از دو رأس A و C به یک فاصله باشند، روی عمودمنصف AC قرار دارند. باتوجه به مثلث رسم شده، معادله عمودمنصف خط AC ، $y = 4$ خواهد بود. محل برخورد $x = 3$ و $y = 4$ همان نقطه D است. در آخر طول AD را به دست می آوریم:

$$AD = \sqrt{(3-0)^2 + (4-0)^2} = \sqrt{25} = 5$$

راه حل دوم: نقطه ای که از رئوس مثلث به یک فاصله باشد، همان محل برخورد عمودمنصف اضلاع مثلث است. چون مثلث قائم الزاویه می باشد، محل برخورد عمودمنصف های آن (D) وسط وتر است. AD میانه وارد بر وتر می باشد، پس طول آن نصف وتر است. بنابراین داریم:

$$AD = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}\sqrt{6^2 + 8^2} = \frac{1}{2}\sqrt{100} = 5$$



طول یک ضلع متوازی اضلاع $\Delta a = a + 1 + a - 1$ است. دو مثلث AOB و COM متشابه‌اند (ز ز)، پس:

$$AOB \sim COM \Rightarrow \frac{S_{AOB}}{S_{COM}} = \left(\frac{AB}{CM}\right)^2 \Rightarrow 9 = \left(\frac{\Delta a}{a+1}\right)^2 \Rightarrow 3 = \frac{\Delta a}{a+1}$$

$$\Rightarrow 3a + 3 = \Delta a \Rightarrow a = \frac{3}{2} \Rightarrow AB = \Delta a = \frac{15}{2}$$



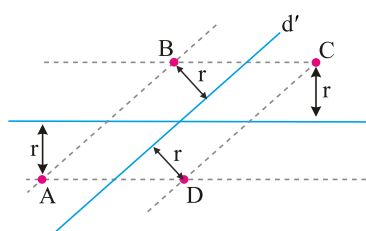
$$\frac{MA}{MB} = \frac{3}{7} \xrightarrow{\text{ترکیب در صورت}} \frac{MA + MB}{MB} = \frac{3 + 7}{7} \Rightarrow \frac{AB}{MB} = \frac{10}{7}$$

$$\Rightarrow \frac{20}{MB} = \frac{10}{7} \Rightarrow MB = 14 \Rightarrow MA = 6$$

$$\frac{NB}{NA} = \frac{3}{2} \xrightarrow{\text{ترکیب در صورت}} \frac{NB + NA}{NA} = \frac{3 + 2}{2} \Rightarrow \frac{20}{NA} = \frac{5}{2} \Rightarrow NA = 8$$

ما مقدار MN را می‌خواهیم:

$$MN = NA - AM = 8 - 6 = 2$$



نقاطی که فاصله آنها از خط d برابر r باشد، دو خط موازی این خط به فاصله r از آن هستند. نقاطی که فاصله آنها از d' برابر r باشد هم دو خط موازی d' به فاصله d از آن هستند.

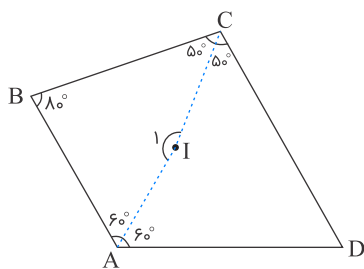
مطابق شکل این خطوط در ۴ نقطه همدیگر را قطع می‌کنند.

می‌دانیم مجموع زوایای داخلی هر چهار ضلعی محدب، 360° است. حال به کمک ویژگی‌های تناسب، داریم:

$$\frac{\hat{A}}{6} = \frac{\hat{B}}{4} = \frac{\hat{C}}{5} = \frac{\hat{D}}{3} = \frac{\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D}}{18} = \frac{360^\circ}{18} = 20^\circ$$

$$\Rightarrow \hat{A} = 120^\circ, \hat{B} = 80^\circ, \hat{C} = 100^\circ, \hat{D} = 60^\circ$$

حال با رسم نیمسازهای زاویه‌های A و C داریم:



$$\hat{I}_1 + 80^\circ + 60^\circ + 50^\circ = 360^\circ$$

$$\Rightarrow \hat{I}_1 = 170^\circ$$

مثلث ABC متساوی‌الساقین است پس $\hat{B}_1 = \hat{C}$. بنابراین دو مثلث $\triangle BMC$ و $\triangle MNB$ دو زاویه برابر دارند و متشابه‌اند:

$$\triangle BMC \sim \triangle MNB \Rightarrow \frac{S_{BMC}}{S_{MNB}} = \left(\frac{MC}{MB}\right)^2$$

$$\Rightarrow \frac{16}{9} = \left(\frac{MC}{MB}\right)^2 \Rightarrow \frac{MC}{MB} = \frac{4}{3} \Rightarrow \frac{BC}{MB} = \frac{1}{3}$$

ابتدا معادله عمودمنصف BC را می‌نویسیم.

$$BC \text{ وسط } M = \frac{B+C}{2} = \left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$$

$$m_{BC} = \frac{2-1}{-3-2} = -\frac{1}{5} \Rightarrow m_L = 5$$

$$L: y - \frac{3}{2} = 5\left(x + \frac{1}{2}\right) \Rightarrow y = 5x + 4$$

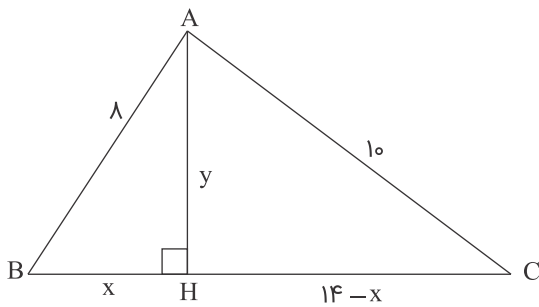
$$AB \text{ معادله خط } m_{AB} = \frac{2-3}{-3-1} = \frac{-1}{-4} = \frac{1}{4}$$

$$AB: y - 3 = \frac{1}{4}(x - 1) \Rightarrow 4y - x = 11$$

حال معادله دو خط را در یک دستگاه حل می‌کنیم:

$$\begin{cases} y = 5x + 4 \\ 4y - x = 11 \end{cases} \Rightarrow 4(5x + 4) - x = 11$$

$$\Rightarrow 20x + 16 - x = 11 \Rightarrow 19x = -5 \Rightarrow x = -\frac{5}{19}$$



$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 17^2 \\ (14 - x)^2 + y^2 = 10^2 \end{cases} \xrightarrow{\text{تفاضل}} (14 - x)^2 - x^2 = 10^2 - 17^2$$

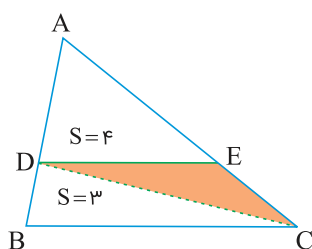
$$\Rightarrow 196 - 28x + x^2 - x^2 = 100 - 289 = -93$$

$$\Rightarrow 196 - 28x = -93 \Rightarrow 28x = 289 \Rightarrow x = \frac{289}{28} = \frac{17}{2}$$

$$y^2 = 17^2 - x^2 = 17^2 - \left(\frac{17}{2}\right)^2 = \frac{289 - 289}{4} = \frac{289}{4}$$

$$\xrightarrow{\text{اتحاد مزدوج}} y = \frac{(17 - \frac{17}{2})(17 + \frac{17}{2})}{4} = \frac{17 \times 25.5}{4} \Rightarrow y = \frac{17\sqrt{6}}{4}$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot AH \cdot BC = \frac{1}{2} \times \frac{17\sqrt{6}}{4} \times 14 = 17\sqrt{6}$$



باتوجه به موازی بودن DE و BC، در ذوزنقه BCED دو مثلث BDC و CDE ارتفاع برابر دارند و نسبت مساحت‌های آن‌ها برابر نسبت قاعده‌هاست و همچنین دو مثلث ADE و CDE ارتفاع مشترک دارند و نسبت مساحت‌های آن‌ها برابر نسبت قاعده‌هاست. پس اگر فرض کنیم: $\frac{AE}{EC} = k$ ، آنگاه داریم:

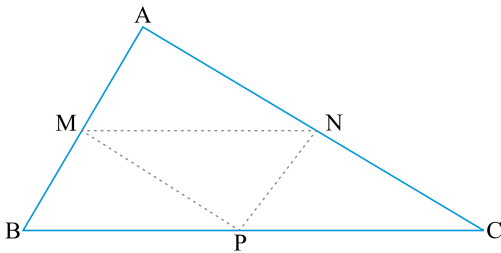
$$\frac{S_{ADE}}{S_{CDE}} = \frac{AE}{EC} = k \Rightarrow S_{CDE} = \frac{۴}{k}$$

$$\frac{S_{CDE}}{S_{BDC}} = \frac{DE}{BC} \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{AE}{AC} = \frac{k}{k+1} \Rightarrow S_{CDE} = \frac{۳k}{k+1}$$

$$\Rightarrow \frac{۴}{k} = \frac{۳k}{k+1} \Rightarrow ۳k^2 = ۴k + ۴$$

$$\Rightarrow ۳k^2 - ۴k - ۴ = 0 \Rightarrow \begin{cases} k = ۲ \\ k = -\frac{۲}{۳} \end{cases}$$

می‌دانیم $k = -\frac{۲}{۳}$ قابل قبول نیست، پس $k = ۲$ و $S_{CDE} = ۲$ به دست می‌آید.



دقت کنید که $NP \parallel AB$ است، پس $m_{NP} = m_{AB}$ می‌باشد.

$$m_{NP} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{4 - (-2)}{1 - (-1)} = \frac{6}{2} = 3$$

نقطه M هم روی ضلع AB است، پس با داشتن یک نقطه از AB و شیب آن، معادله آن را می‌نویسیم:

$$M(3, 2)$$

$$y - 2 = 3(x - 3) \Rightarrow y - 3x + 7 = 0$$

ضلع ۳۰ از مثلث دوم می‌تواند با هرکدام از اضلاع مثلث اول متناسب باشد، بنابراین سه حالت ممکن است:

$$\frac{3}{30} = \frac{4}{x} = \frac{5}{y} \Rightarrow \frac{1}{10} = \frac{\text{محیط کوچک}}{\text{محیط بزرگ}} \Rightarrow \frac{1}{10} = \frac{12}{\text{محیط بزرگ}} \Rightarrow \text{محیط بزرگ} = 120$$

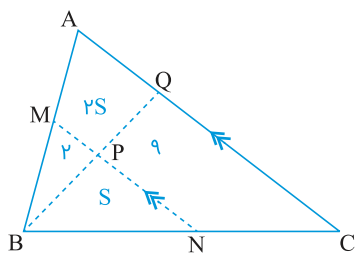
$$\frac{3}{x} = \frac{4}{30} = \frac{5}{y} \Rightarrow \frac{2}{15} = \frac{\text{محیط کوچک}}{\text{محیط بزرگ}} \Rightarrow \frac{2}{15} = \frac{12}{\text{محیط بزرگ}} \Rightarrow \text{محیط بزرگ} = 90$$

$$\frac{3}{x} = \frac{4}{y} = \frac{5}{30} \Rightarrow \frac{1}{6} = \frac{\text{محیط کوچک}}{\text{محیط بزرگ}} \Rightarrow \frac{1}{6} = \frac{12}{\text{محیط بزرگ}} \Rightarrow \text{محیط بزرگ} = 72$$

طبق ویژگی‌های تناسب داریم:

$$\frac{a}{2} = \frac{b}{3} = \frac{c}{4} = \frac{d}{5} = \frac{e}{6} = \frac{a+b+c+d+e}{2+3+4+5+6}$$

$$\Rightarrow \frac{a+b+c+d+e}{20} = \frac{d}{5} \Rightarrow \frac{a+b+c+d+e}{d} = \frac{20}{5} = 4$$



با استفاده از قضیه تالس داریم:

$$\frac{MP}{AQ} = \frac{BP}{BQ}, \quad \frac{NP}{CQ} = \frac{BP}{BQ}$$

$$\Rightarrow \frac{MP}{AQ} = \frac{NP}{CQ} \Rightarrow \frac{MP}{NP} = \frac{AQ}{CQ}$$

همچنین:

$$\frac{S_{BMP}}{S_{BPN}} = \left(\frac{MP}{NP}\right)^2, \quad \frac{S_{ABQ}}{S_{BCQ}} = \left(\frac{AQ}{CQ}\right)^2$$

$$\Rightarrow \frac{2}{S} = \frac{2S + 2}{S + 9} \Rightarrow 2S^2 + 2S = 2S + 18 \Rightarrow S = 3$$

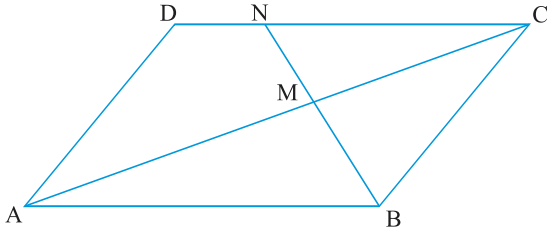
بنابراین مساحت مثلث ABC برابر است با:

$$S_{ABC} = 3 + 9 + 6 + 2 = 20$$

مثلث‌های CMN و BCM ارتفاع مشترک دارند (از رأس C)، پس نسبت مساحت‌های آنها با نسبت قاعده‌هایشان برابر است:

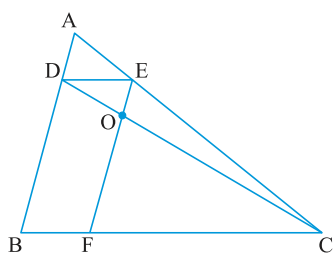
$$\frac{S_{CMN}}{S_{BCM}} = \frac{MN}{MB} \Rightarrow \frac{۳}{۴} = \frac{MN}{MB}$$

مثلث‌های CMN و ABM متشابه‌اند و داریم:



$$\frac{S_{CMN}}{S_{AMB}} = \left(\frac{MN}{MB}\right)^2 \Rightarrow \frac{۳}{S_{AMB}} = \frac{۹}{۱۶} \Rightarrow S_{AMB} = \frac{۱۶}{۳}$$

دو مثلث ODE و OFC متشابه‌اند (ز ز) و نسبت مساحت‌های آن‌ها مجذور نسبت اضلاع است و داریم:



$$\triangle ODE \sim \triangle OFC \Rightarrow \frac{S_{OFC}}{S_{ODE}} = \left(\frac{FC}{DE}\right)^2 \Rightarrow 9 = \left(\frac{FC}{DE}\right)^2$$

$$\Rightarrow FC = 3DE$$

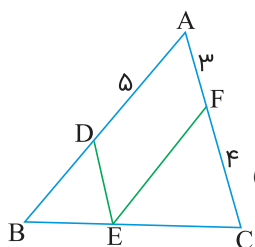
در متوازی‌الاضلاع، اضلاع روبه‌رو برابرند، پس $DE = BF$ و در نتیجه:

$$\Rightarrow BC = 4BF \Rightarrow BC = 4DE$$

دو مثلث ADE و ABC متشابه‌اند (ز ز)، بنابراین:

$$\triangle ABC \sim \triangle ADE \Rightarrow \frac{S_{ABC}}{S_{ADE}} = \left(\frac{BC}{DE}\right)^2 = 4^2 = 16$$

اضلاع روبه‌رو در متوازی‌الاضلاع برابرند، پس $DE = AF = 3$.



$$\text{تالس: } \frac{DE}{AC} = \frac{BD}{AB} \Rightarrow \frac{3}{7} = \frac{BD}{BD + 5} \Rightarrow BD = \frac{15}{4}$$

$AH = AH' = 1 \Rightarrow A$ روی نیمساز است $\Rightarrow OA$ نیمساز است
 $\begin{cases} \hat{O}_1 = \hat{O}_2 \\ OA \text{ نیمساز} \end{cases} \xrightarrow{\text{وتر و یک زاویه حاده}} \triangle OAH \cong \triangle OA'H' \Rightarrow OH = OH'$
 $\Rightarrow 3x^2 - 5x = 3x - x^2$
 $\Rightarrow 4x^2 - 8x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases} \text{ غ.ق.ق}$

$$OH = OH' = 3(4) - 5(2) = 2$$

$$OH^2 + AH^2 = OA^2 \Rightarrow 4 + 1 = 5 = OA^2 \Rightarrow OA = \sqrt{5}$$

$$\triangle AOH \text{ محیط} = 1 + 2 + \sqrt{5} = 3 + \sqrt{5}$$

$$\triangle AOH \text{ مساحت} = \frac{2 \times 1}{2} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{\text{محیط}}{\text{مساحت}} = \frac{3 + \sqrt{5}}{1} = 3 + \sqrt{5}$$

نقطه M از دو ضلع زاویه یک فاصله است، پس:

$MC = MD \Rightarrow \triangle AMC \cong \triangle AMD \Rightarrow MD = 8, AD = 12$
 $\Rightarrow BD = 12 - 6 = 6$
 $\triangle BDM : BM^2 = BD^2 + DM^2 \Rightarrow BM^2 = 6^2 + 8^2 \Rightarrow BM = 10$

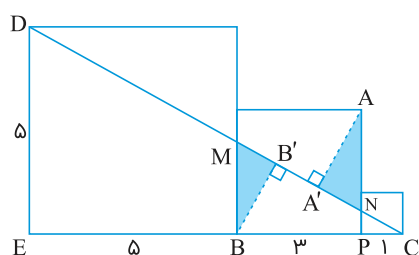
ابتدا از مثلث ABC شروع می‌کنیم که یک مجهول دارد و سپس به سراغ مثلث ABD می‌رویم:

$$\frac{y}{3} = \frac{12}{4} \Rightarrow y = 9$$

حالا به سراغ مثلث ABD می‌رویم و تالس را برای آن می‌نویسیم:

$$\frac{7/5}{x} = \frac{y}{3} \Rightarrow \frac{7/5}{x} = \frac{9}{3} \Rightarrow x = 2/5 \Rightarrow x + y = 11/5$$

ابتدا به کمک تالس طول NP و BM را به دست می‌آوریم:



$$NP \parallel DE \Rightarrow \frac{NP}{DE} = \frac{CP}{CE} \Rightarrow \frac{NP}{5} = \frac{1}{9} \Rightarrow NP = \frac{5}{9}$$

$$\Rightarrow AN = 3 - \frac{5}{9} = \frac{27 - 5}{9} = \frac{22}{9}$$

$$BM \parallel DE \Rightarrow \frac{BM}{DE} = \frac{BC}{CE} \Rightarrow \frac{BM}{5} = \frac{4}{9} \Rightarrow BM = \frac{20}{9}$$

دو مثلث $BB'M$ و $AA'N$ متشابه‌اند و نسبت مساحت‌های آن‌ها مجذور نسبت اضلاع است.

$$\triangle BB'M \sim \triangle AA'N \Rightarrow \frac{S_{BB'M}}{S_{AA'N}} = \left(\frac{BM}{AN}\right)^2 = \left(\frac{\frac{20}{9}}{\frac{22}{9}}\right)^2 = \left(\frac{10}{11}\right)^2 = 0.82 = 82\%$$